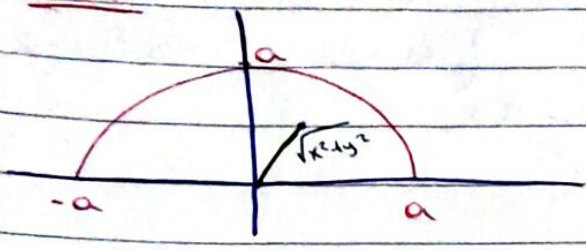
(1)

9/3/20

Παράδειγμα Να βρεθεί το κέντρο μάζας λεπτού ημικυκλικού στρώματος με πυκνότητα ανάλογη της απόστασης από το κέντρο του.

Λύση:



Η πυκνότητα του κυκλικού δίσκου είναι της μορφής:
$\rho(x,y) = \lambda\sqrt{x^2+y^2}$

Υπολογίζω τη μάζα: $m = \iint \rho \, dy\, dx = \iint \lambda\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$

Βλέπω ότι η ολοκλήρωση του $\lambda\sqrt{x^2+y^2}$ είναι δύσκολη, γι'αυτό αλλάζω τις συντεταγμένες. Έχω κύκλο => χρησιμοποιώ πολικές συντεταγμένες

Αλλάζω σε πολικές συντεταγμένες

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ x^2+y^2 &= r^2 \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} \end{aligned}}$$

Όταν αλλάζω συν/νες δε με ενδιαφέρει μόνο πώς πηγαίνω από τα x, y στα r, θ αλλά και πως πηγαίνω απ' τα r, θ στα x, y

$$m = \iint \lambda \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{r}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{a} \lambda r^2\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{a} r^2\, dr =$$

$$= \pi \frac{a^3}{3}$$

Έχω σταθερά άκρα κι αυτό γιατί έχω κύκλο σε πολικές συν/νες ο οποίος κύκλος σε πολικές συν/νες είναι τετράγωνο

• Αν δεν χρησιμοποιούσα πολικές τότε:

$$m = \iint \rho\, dy\,dx = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \lambda\sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

Θα έκανα τριγωνομετρική αντικατάσταση, δηλ. θέτω

$$\left.\begin{array}{l} x^2 = \sin^2\theta \\ y^2 = \cos^2\theta \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Ροπές αδράνειας: $\boxed{M_x = \iint y\rho\, dy\, dx =}$

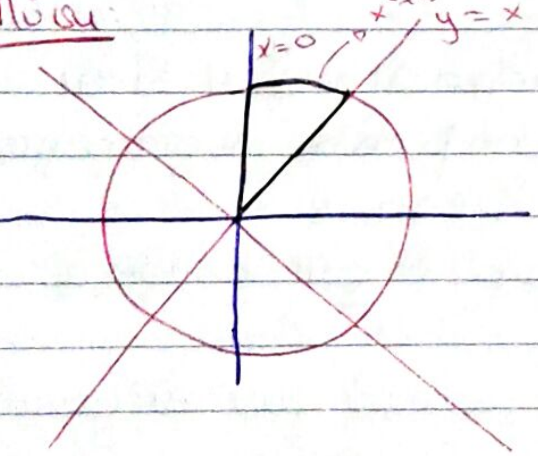
$$= \int_0^{\pi}\int_0^{a} r\sin\theta\, \lambda r\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^{a} r^3\, dr = \dots$$

$$\boxed{M_y = \int_0^{\pi}\int_0^{a} x\rho\, dy\, dx} = \int_0^{\pi}\int_0^{a} r\cos\theta\, \lambda r\, r\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_0^{a} r^3\, dr$$

παράδειγμα: Να βρεθεί το κεντροειδές (σταθ. πυκνότητα) ενός κομματιού πίτσας.

Λύση



Σταθερή πυκνότητα $\rho = \rho_0$

$$m = \iint_{x}^{\sqrt{a^2-x^2}} \rho_0\, dy\, dx$$

Για να βρω τα άκρα του dx λύνω το (Σ):

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2 = a^2 \\ y = x \end{array}\right. \Rightarrow 2x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$$

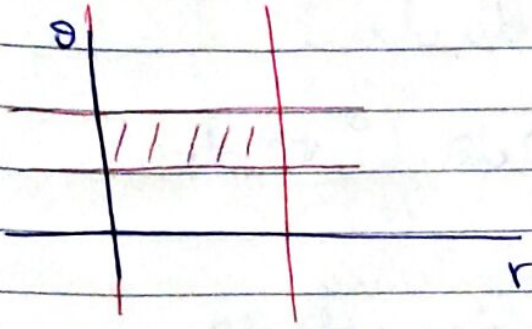
Άρα: $m = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\int_{x}^{\sqrt{a^2-x^2}} \rho_0\, dy\, dx = \rho_0\int_0^{a/\sqrt{2}} \left(\sqrt{a^2-x^2} - x\right) dx =$

$$= \frac{\rho_0 \pi a^2}{8}$$

β' τρόπος : Με πολικές συν/νες

$$m = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{0}^{a} \rho_0\, r\, dr\, d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_{0}^{a} \rho_0 r\, dr = \frac{\pi}{4}\rho_0\frac{a^2}{2} = \frac{\rho_0 \pi a^2}{8}$$

• Πώς θα ζωγραφίσω το κομμάτι πίτσας σε πολικές συν/νες ?



Ο κύκλος σε πολικές συν/νες είναι ΠΑΝΤΑ τετράγωνο

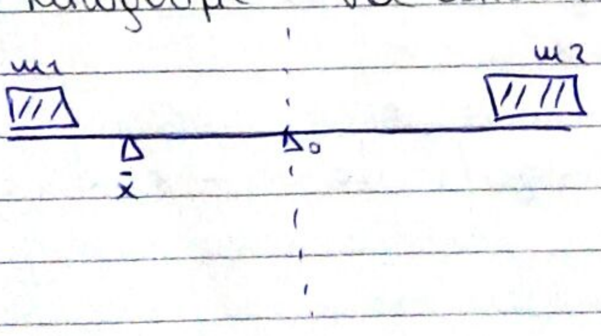
Ροπές αδράνειας

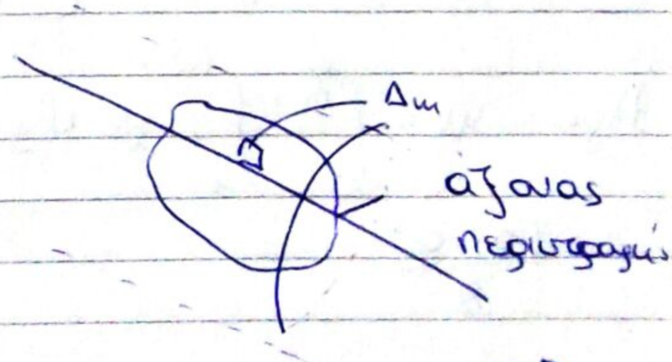
→ Οι ροπές που έχουμε ορίσει μέχρι τώρα δίνουν πληροφορίες για τα σημεία ισορροπίας. Αναζητούμε πληροφορίες για ένα σώμα που δεν ισορροπεί.

Παράδειγμα: Θεωρούμε ότι το υπομόχλιο δεν είναι στο σημείο ισορροπίας, άρα η τραμπάλα περιστρέφεται. Δημιουργούνται τα εξής ερωτήματα:

i) Πόση ενέργεια χρειάζεται για να περιστρέψουμε το σώμα ?

ii) Μπορούμε να αποθηκεύσουμε αυτή την ενέργεια?



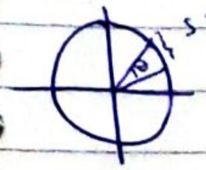


→

Η στοιχειώδης μάζα Δm απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση r_i και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}}$, όπου η • δηλώνει χρονική παράγωγο

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι $\boxed{\upsilon = \frac{ds}{dt} = \dot{s}}$

s το τόξο που διανύουμε. Η στοιχειώδης μάζα έχει $\upsilon_i = \frac{ds_i}{dt} = \frac{d}{dt}(r_i\theta) = r_i\frac{d\theta}{dt} = r_i\omega$



Η αντίστοιχη κινητική ενέργεια είναι:
$\Delta E_i = \frac{1}{2}\Delta m\, \upsilon_i^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r_i^2 \Delta m_i$

Αθροίζουμε τη συνολική ενέργεια:
$E = \int \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 dm$

Ορίζω $\boxed{I = \int r^2 dm}$ ώστε $E = \frac{1}{2} I\omega^2$ κατ' αντιστοιχία του $E = \frac{1}{2} m\upsilon^2$

Ορίζουμε την ποσότητα $I = \int r^2 dm$ ως ροπή αδράνειας ή δεύτερη ροπή του συστήματος με την εξής φυσική σημασία: (1) Για να περιστρέψουμε ένα περιστρεφόμενο άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω χρειάζομαι την ενέργεια $\boxed{E = \frac{1}{2} I\omega^2}$

(2) Για να σταματήσω ένα περιστρεφόμενο άξονα χρειάζομαι το ίδιο ποσό ενέργειας

3 Η ροπή αδράνειας είναι το περιστροφικό ανάλογο της μάζας. Εμπεριέχει τη μάζα αλλά και τον τρόπο κατανομής της.

Ορίζουμε τις ροπές αδράνειας ή δεύτερες ροπές ως προς τον άξονα x : $\boxed{I_x = \iint_R y^2 \rho(x,y)\, dA}$

ως προς τον άξονα y: $\boxed{I_y = \iint_R x^2 \rho\, dA}$

ως προς την αρχή των αξόνων (πολική ροπή)

$$\boxed{I_0 = \iint_R (x^2+y^2)\rho\, dA = I_x + I_y}$$

Γενικότερα η ροπή ως προς μια ευθεία L είναι:

$\boxed{I_L = \iint_R r^2(x,y)\rho\, dA}$ r: απόσταση του σημείου (x,y) από την L

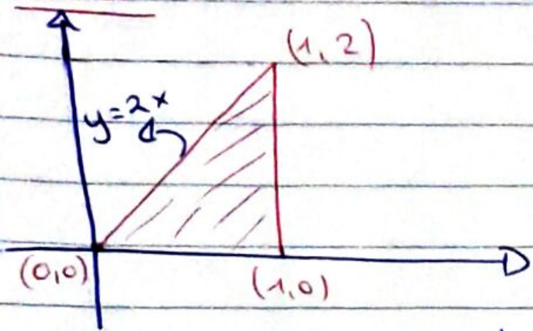
Βάσει των ροπών αδράνειας ορίζω τις ακτίνες αδράνειας:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= mR_x^2 \\ I_y &= mR_y^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} R_x &= \sqrt{I_x/m} \\ R_y &= \sqrt{I_y/m} \end{aligned}\right.$$

• Οι ποσότητες αυτές μας λένε σε πόση απόσταση απ' τους αντίστοιχους άξονες θα μπορούσαμε να συγκεντρώσουμε όλη τη μάζα του σώματος, δηλ να αντιστοιχίσουμε το σώμα σε υλικό σημείο, ώστε να έχουμε την ίδια ροπή αδράνειας

Παράδειγμα: Να βρεθεί το κέντρο μάζας και οι ροπές αδράνειας με τις αντίστοιχες ακτίνες αδράνειας με κορυφές ~~και πυκνότητα~~ τα σημεία (0,0), (1,0), (1,2) και πυκνότητα $\rho = 6x + 6y + 6$

Λύση:



$$m = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6)\, dy\, dx$$

$$M_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y \rho \, dy\, dx$$

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x \rho \, dy\, dx$$

$$I_x = \int_0^1 \int_0^{2x} y^2 \rho \, dy\, dx$$

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2 \rho \, dy\, dx$$

• Στη γενική περίπτωση (δηλ σε 3 διαστάσεις) τα αντίστοιχα τριπλά ολοκληρώματα μετατρέπονται σε όμοιους, ενώ όταν μιλάμε για μονοδιάστατα σώματα (ελατήρια, λεπτά νήματα κτλ) τα ολοκληρώματα μετατρέπονται σε επικαμπύλια